

doi:10.16576/j.ISSN.1007-4414.2023.04.008

## 偏心轮机构驱动功率计算分析\*

张凤宝,石志孝,王安安

(甘肃工大舞台技术工程有限公司,甘肃 兰州 730050)

**摘要:**该文针对如何计算对心直动滚子从动件偏心轮机构的最大驱动功率的问题,提出了“偏心轮在运动过程中负载转矩最大时驱动功率达到峰值”的思路。通过对对心直动滚子从动件偏心轮机构进行运动分析、静力学分析及数学运算,得出其最大负载转矩对应转角的代数表达式,并根据实例中的已知参数,进行应用计算,再通过不同的计算思路验证计算结果,从而论证新计算方法的正确性。

**关键词:**对心直动滚子从动件;偏心轮机构;偏心轮驱动功率;峰值转矩

中图分类号:TH112.2

文献标识码:A

文章编号:1007-4414(2023)04-0027-04

## Calculation and Analysis on Driving Power of Eccentric Wheel Mechanism

ZHANG Feng-bao, SHI Zhi-xiao, WANG An-an

(Gansu Gongda Stage Technology &amp; Engineering Co., Ltd, Lanzhou 730050, Gansu, China)

**Abstract:** Aiming at how to calculate the maximum driving power of eccentric wheel mechanism of the centering straight moving roller follower, the idea of "the driving power of the eccentric wheel reaches its peak when the load torque is maximum in movement process" is put forward in this paper. Through kinematic analysis, statics analysis and mathematical calculation of the eccentric wheel mechanism of centering straight moving roller follower, the algebraic expression of the maximum load torque corresponding to the angle is obtained. Based on the known parameters in the instance, the application calculation is carried out, and then the calculation results are verified through different calculation ideas so as to demonstrate the correctness of the new calculation method.

**Key words:** centering straight moving roller follower; eccentric wheel mechanism; driving power of the eccentric wheel; peak torque

## 0 引言

偏心轮机构结构相对简单,零部件加工也较为简便,因此在从动件连续“推、回”运动要求的传动系统中应用广泛。例如,舞台机械设备侧辅助(补偿)升降台的传动系统通常采用的是集成偏心轮机构<sup>[1]</sup>。驱动功率计算作为选择匹配电机的依据,在电动机械设备的传动系统设计过程中必不可少。在偏心轮机构传动系统中,传动轴带动偏心轮匀速转动时,从动件在推程或者回程阶段始终在做变加速度直线运动,其驱动功率的计算十分复杂。目前,针对负载恒定的直动滚子从动件偏心轮机构的最大驱动功率计算方法,是以从动件运动分析入手,在其变加速度直线运动过程中,当加速度减小至零时,移动速度最大,驱动功率达到峰值。

笔者在对直动滚子从动件偏心轮机构的最大驱动功率的计算中,采用“偏心轮在运动过程中负载转矩最大时驱动功率达到峰值”的思路,对对心直动滚子从动件偏心轮机构进行了运动分析、静力学分析及数学运算,得出偏心轮负载转矩计算公式和负载转矩最大时对应转角的代数表达式,在偏心轮机构尺寸

参数设计完成后,便可利用表达式求得负载转矩最大时对应的转角以及最大负载转矩,进而计算出最大驱动功率。此方法大大简化了直动滚子从动件偏心轮机构的最大驱动功率的计算过程,同时还得出了偏心轮驱动轴扭矩,便于传动系统后续的设计计算。

## 1 偏心轮机构分析

## 1.1 偏心轮机构几何关系分析

以某对心直动滚子从动件偏心轮机构为例进行分析计算,机构如图1所示。

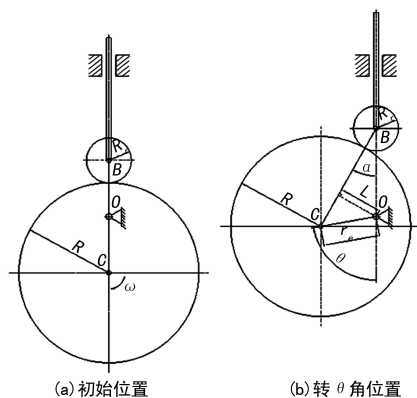


图1 对心直动滚子从动件偏心轮机构

\* 收稿日期:2023-01-15

作者简介:张凤宝(1988-),男,甘肃渭源人,工程师,研究方向:舞台机械工程设计。

偏心轮顺时针旋转,转过 $\theta$ 角时压力角为 $\alpha$ ,偏心轮半径为 $R$ ,偏心轮偏心距为 $r_e$ ,从动件滚子半径 $R_r$ <sup>[2]</sup>,偏心轮受从动轮作用力的力臂为 $L$ 。

由图中几何关系可知,  $\sin \alpha = \frac{r_e}{R + R_r} \sin \theta$ , 为简化计算, 设定  $\lambda = \frac{r_e}{R + R_r}$ <sup>[3]</sup>, 即:

$$\sin \alpha = \lambda \sin \theta \quad (1)$$

另有:

$$L = r_e \sin(\theta - \alpha) \quad (2)$$

## 1.2 偏心轮机构受力分析

偏心轮转过 $\theta$ 角时对从动件做静力学分析(静止状态受力分析),如图2所示,偏心轮对从动件支撑力 $F_z$ 、从动件自重(包含其负载) $G$ 、从动件水平方向受到的约束力 $F_y$ ,三力平衡,由图中几何关系可知:

$$F_z = G / \cos \alpha \quad (3)$$

对偏心轮在转过 $\theta$ 角时做静力学分析(静止状态受力分析),如图3所示,偏心轮受从动件的作用力 $F$ 与 $F_z$ 是一对作用与反作用力(即: $F = F_z$ ),故偏心轮负载转矩为:

$$T = FL = Gr_e \sin(\theta - \alpha) / \cos \alpha \quad (4)$$

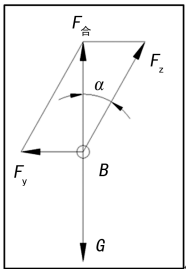


图2 从动件滚子静止状态受力分析

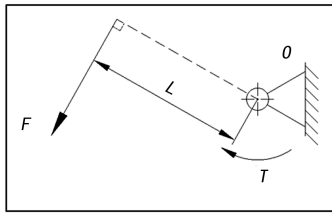


图3 偏心轮静止状态受力分析

## 2 运动分析及代数运算

根据转矩、转速和功率的关系公式  $T = 9\,550 P / n$ <sup>[2]</sup>,以及从动件运行完成所需时间的要求,当偏心轮驱动轴匀速转动时,可确定偏心轮转速 $n$ ,故偏心轮驱动功率 $P$ 与其输出转矩 $T$ 成正比,当偏心轮旋转至某个相位输出转矩 $T$ 最大时,偏心轮输出功率 $P$ 瞬时达到最大,从而可得出驱动系统输入功率的峰值。

根据式(1)、(4)进行代数运算:

$$T = Gr_e \left( \sin \theta - \frac{\sin \theta \cos \theta}{\sqrt{1/\lambda^2 - (\sin \theta)^2}} \right) \quad (5)$$

设定函数 $f(\theta)$ :

$$f(\theta) = \sin \theta - \frac{\sin \theta \cos \theta}{\sqrt{1/\lambda^2 - (\sin \theta)^2}} \quad (6)$$

其中: $0 < \theta < \pi, 0 < \lambda < 1$ 。

只要函数 $f(\theta)$ 值达到峰值, $T$ 值即为最大值,由于可导函数的极值点导数一定等于0<sup>[4]</sup>,故令函数 $f(\theta)$ 的导数 $f(\theta)' = 0$ , ( $0 < \theta < \pi, 0 < \lambda < 1$ ),即:

$$\frac{d}{d\theta} \left( \sin \theta - \frac{\sin \theta \cos \theta}{\sqrt{1/\lambda^2 - (\sin \theta)^2}} \right) = 0 \quad (7)$$

( $0 < \theta < \pi, 0 < \lambda < 1$ )

运算后得出关于 $\theta$ 的方程:

$$\cos \theta + \frac{(\sin \theta)^2}{\sqrt{1/\lambda^2 - (\sin \theta)^2}} - \frac{(\cos \theta)^2}{\sqrt{1/\lambda^2 - (\sin \theta)^2}} - \frac{(\sin \theta)^2 (\cos \theta)^2}{[1/\lambda^2 - (\sin \theta)^2]^{\frac{3}{2}}} = 0 \quad (8)$$

利用 WolframAlpha 软件对以上方程求解得:

$$\theta = 2 \cot \sqrt{\text{Root}[f(x), 4]} \quad (9)$$

$$f(x) = \frac{1}{\lambda^4} x^6 + \frac{2}{\lambda^4} x^5 - \left( \frac{1}{\lambda^4} + \frac{16}{\lambda^2} \right) x^4 - \left( \frac{4}{\lambda^4} + \frac{32}{\lambda^2} - 64 \right) x^3 - \left( \frac{1}{\lambda^4} + \frac{16}{\lambda^2} \right) x^2 + \frac{2}{\lambda^4} x + \frac{1}{\lambda^4} \quad (10)$$

式中:Root[ $f(x)$ , 4]表示函数 $f(x) = 0$ 时,方程求解得到 $x$ 的第4个解。

对心直动滚子从动件偏心轮机构设计完成后,偏心轮半径 $R$ ,偏心轮偏心距 $r_e$ 以及从动件滚子半径 $R_r$ 均为常数,从而确定 $\lambda$ 取值,代入方程 $f(x) = 0$ ,利用 WolframAlpha 软件求解,再将第4个解代入表达式(9),计算出偏心轮输出转矩最大时的转角 $\theta'$ ,将其代入表达式(5)计算出偏心轮最大输出转矩 $T_{\max}$ ,从而计算出偏心轮驱动轴匀速转动时(转速 $n$ ),偏心轮最大输出功率 $P_{\max}$ ,在考虑传动系统效率 $\eta$ 后,最终计算确定驱动系统输入功率的峰值。

## 3 数值算例

舞台机械设备侧补偿升降台,台面规格为 $18 \text{ m} \times 3 \text{ m}$ ,升降行程 $250 \text{ mm}$ ,完成时间 $5 \text{ s}$ ,升降台负载及其台架自重合计约 $200 \text{ kN}$ ,传动系统中采用对心直动滚子从动件偏心轮机构,按8个点布置顶升台架,该设备的驱动电机功率确定需计算出偏心轮机构最大驱动功率,计算过程如下。

根据示例中设备参数可知:偏心轮机构从动件推程 $h = 250 \text{ mm}$ ,完成推程时间为 $t = 5 \text{ s}$ ,负载 $G = 200 \text{ kN}$ 。通过相应的设计计算,从动件滚子轴半径 $r = 20 \text{ mm}$ ,故从动件滚子半径 $R_r = 2.5 \cdot r = 50 \text{ mm}$ ;偏心轮轮毂半径 $R_h = 70 \text{ mm}$ ,故基圆半径 $R_b = R_r + R_h + 5 = 125 \text{ mm}$ ,偏心轮轮廓半径 $R = R_b - R_r + h/2 = 200 \text{ mm}$ ;偏心

距  $r_e = h/2 = 125 \text{ mm}$ 。

由上述取值计算得  $\lambda = \frac{r_e}{R+R_r} = 125/(200+50) =$

0.5。将  $\lambda = 0.5$  代入式(10),并令其值为0,则有:

$$\frac{1}{0.5^4}x^6 + \frac{2}{0.5^4}x^5 - \left(\frac{1}{0.5^4} + \frac{16}{0.5^2}\right)x^4 - \left(\frac{4}{0.5^4} + \frac{32}{0.5^2} - 64\right)x^3 - \left(\frac{1}{0.5^4} + \frac{16}{0.5^2}\right)x^2 + \frac{2}{0.5^4}x + \frac{1}{0.5^4} = 0 \quad (11)$$

化简后得:

$$x^6 + 2x^5 - 5x^4 - 8x^3 - 5x^2 + 2x + 1 = 0 \quad (12)$$

该一元六次方程利用 WolframAlpha 软件求得,  $x$  的6个解分别为:①  $x \approx -2.985\ 986\ 84$ ;②  $x \approx -0.334\ 897\ 66$ ;③  $x \approx 0.449\ 847\ 34$ ;④  $x \approx 2.222\ 976\ 36$ ;⑤  $x \approx -0.675\ 97 - 0.736\ 93i$ ;⑥  $x \approx -0.675\ 97 + 0.736\ 93i$ 。

根据式(10)取  $x$  的第4个解代入得:

$$\theta' = 2\cot\sqrt{2.222\ 976\ 36} \approx 1.960\ 004\ 12 \quad (13)$$

转化为角度即  $\theta' \approx 112.299\ 964^\circ$ 。

根据已知条件,将  $\theta'$  值和  $\lambda$  值代入表达式,得出偏心轮最大输出转矩  $T_{\max} = 28\ 080.2 \text{ Nm}$ 。

由于偏心轮机构完成推程只需旋转半圈,根据完成时间  $t = 5 \text{ s}$  的要求,计算偏心轮驱动轴转速  $n$ :

$$n = \frac{0.5}{t} \times 60 = \frac{0.5}{5} \times 60 = 6 \text{ r/min} \quad (14)$$

由公式  $T = 9\ 550 P/n$  得  $P = Tn/9\ 550$ ,故:

$$P_{\max} = T_{\max} n/9\ 550 = 28\ 080.2 \times 6/9\ 550 \approx 17.64 \text{ kW} \quad (15)$$

综上所述,算例中的对心直动滚子从动件偏心轮机构驱动负载时,在整个推(回)程中最大输出功率为  $17.64 \text{ kW}$ 。

#### 4 计算结果验证

前面引言中已叙述,当偏心轮在运动过程中旋转至某一角度时从动件运行加速度为零,此时从动件达到瞬时最高运行速度  $v_{\max}$ ,由功率计算公式  $P = Fv$  可知,从动件负载  $G$  恒定,驱动功率与速度成正比关系,得出以下表达式:

$$P_{\max} = Gv_{\max} \quad (16)$$

从第六版《机械设计手册》第4篇第2章3.8节(圆弧凸轮工作轮廓的设计)的表4-2-36中查得直动滚子从动件偏心轮机构的压力角、速度以及加速度表达式,由于此次研究偏心轮机构为对心直动滚子从动件凸轮机构,将表达式中  $e$  和  $\alpha_0$  以0代入<sup>[2]</sup>,得出以下表达式。

压力角表达式为:

$$\alpha = \arcsin\left(\frac{r_e \sin \theta}{R + R_r}\right) \quad (17)$$

速度表达式为:

$$v = r_e \omega_1 \sin(\theta - \alpha) / \cos \alpha \quad (18)$$

加速度表达式为:

$$a = \frac{r_e \omega_1}{\cos \alpha} \left[ \cos(\theta - \alpha) - \frac{r_e \cos^2 \theta}{(R + R_r) \cos^2 \alpha} \right] \quad (19)$$

上述表达式中  $\omega_1$  为偏心轮旋转角速度,故:

$$\omega_1 = n\pi/30 \quad (20)$$

将示例中的偏心轮机构尺寸以及  $\theta'$  值( $\theta' \approx 112.299\ 964^\circ$ )和偏心轮驱动轴转速  $n$  ( $n = 6 \text{ r/min}$ ) 计算结果代入式(17)~(20)得出:瞬时压力角  $\alpha' = 27.555\ 33^\circ$ ,最大速度  $v_{\max} \approx 0.088\ 2 \text{ m/s}$ ,瞬时加速度  $a' = 2.6 \times 10^{-7} \text{ m/s}^2$ 。

计算结果显示,当偏心轮旋转至  $\theta'$  角度时,瞬时加速度  $a'$  基本接近零,从动件达到最大运行速度。再将最大速度  $v_{\max}$  值代入式(16)得:

$$P_{\max} = 200 \times 0.088\ 2 = 17.64 \text{ kW}$$

上述计算结果与算例中求得的偏心轮最大输出功率一致,故此次探讨的对心直动滚子从动件偏心轮机构最大输出功率的计算方法及思路是正确的。

#### 5 不对心直动滚子从动件偏心轮功率计算

如图4所示为不对心的直动滚子从动件偏心轮机构,其偏心轮输出最大瞬时功率的推导计算也按文中的计算方法及思路进行。

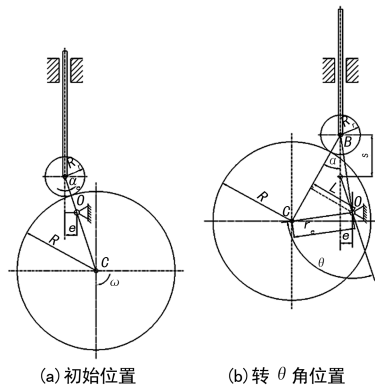


图4 不对心直动滚子从动件偏心轮机构

由图中几何关系可知:

$$\alpha_0 = \arcsin\left(\frac{e}{R+R_r-r_e}\right) \quad (21)$$

式中: $e$  为偏距; $\alpha_0$  为从动件在最低点(初始位置)时的压力角。

由  $(R+R_r) \sin \alpha + e = r_e \sin(\theta - \alpha_0)$  可得:

$$\sin \alpha = \frac{r_e \sin(\theta - \alpha_0) - e}{R + R_r} \quad (22)$$

为简化计算,设定  $\lambda = \frac{r_e}{R+R_r}$ ,  $k = \frac{e}{R+R_r}$ , 即:

$$\sin \alpha = \lambda \sin(\theta - \alpha_0) - k \quad (23)$$

$$L = r_e \sin(\theta - \alpha_0 - \alpha) \quad (24)$$

依然对偏心轮转过 $\theta$ 角时从动件和偏心轮做静力学分析(静止状态受力分析),根据力矩平衡关系,偏心轮输出转矩为:

$$T = \frac{Gr_e}{\cos \alpha} \sin(\theta - \alpha_0 - \alpha) \quad (25)$$

根据式(23)、(25)进行代数运算:

$$T = Gr_e \left\{ \sin(\theta - \alpha_0) - \frac{\cos(\theta - \alpha_0) [\lambda \sin(\theta - \alpha_0) - k]}{\sqrt{1 - [\lambda \sin(\theta - \alpha_0) - k]^2}} \right\} \quad (26)$$

直动滚子从动件偏心轮机构设计完成后,偏距为 $e$ ,偏心轮半径 $R$ ,偏心轮偏心距 $r_e$ 以及从动件滚子半径 $R_r$ 均为已知常数,故 $\alpha_0$ 可等同于常数,设定 $\theta_0 = \theta - \alpha_0$ ,设定函数 $f(\theta_0)$ :

$$f(\theta_0) = \sin \theta_0 - \frac{\cos \theta_0 (\lambda \sin \theta_0 - k)}{\sqrt{1 - (\lambda \sin \theta_0 - k)^2}} \quad (27)$$

其中: $0 < \lambda < 1, 0 < k < 1$ 。

同理当函数 $f(\theta_0)$ 值达到峰值时, $T$ 值为最大值,由于可导函数的极值点导数一定等于 $0^{[4]}$ ,故令函数 $f(\theta_0)$ 的导数 $f'(\theta_0) = 0, (0 < \lambda < 1, 0 < k < 1)$ ,即:

$$\frac{d}{d\theta_0} \left( \sin \theta_0 - \frac{\cos \theta_0 (\lambda \sin \theta_0 - k)}{\sqrt{1 - (\lambda \sin \theta_0 - k)^2}} \right) = 0 \quad (28)$$

$$\cos \theta_0 + \frac{\sin \theta_0 (\lambda \sin \theta_0 - k)}{\sqrt{1 - (\lambda \sin \theta_0 - k)^2}} - \frac{\lambda (\cos \theta_0)^2}{\sqrt{1 - (\lambda \sin \theta_0 - k)^2}} - \frac{\lambda (\cos \theta_0)^2 (\lambda \sin \theta_0 - k)^2}{[1 - (\lambda \sin \theta_0 - k)^2]^{\frac{3}{2}}} = 0 \quad (29)$$

对上述方程求解时,由于出现两个系数常数 $\lambda$ 和 $k$ ,未知数 $\theta_0$ 的表达式过于复杂,此处不再罗列。

但当直动滚子从动件偏心轮机构设计完成后, $\lambda$ 和 $k$ 可用计算数值代入,便可求得 $\theta_0$ 值,再根据已知数计算出 $\alpha_0$ 值,然后计算出偏心轮输出最大转矩时的转角,将其代入表达式计算出偏心轮最大输出转矩,从而计算出偏心轮驱动轴匀速转动时,偏心轮输出的瞬时最大功率,在考虑传动系统效率 $\eta$ 后,最终计算确定驱动系统输入功率的峰值。

## 6 结语

在机械传动系统设计中采用直动滚子从动件偏心轮机构,不仅要保证从动件的运动参数,还要优化设计偏心轮尺寸,同时其驱动功率的计算也必不可少。按照“从动件负载恒定,运行速度达到瞬时最大时,驱动功率达峰”的思路进行计算,则对心直动滚子从动件偏心轮机构的驱动功率计算过程较为繁琐。文中提出的“偏心轮在运动过程中负载转矩最大时驱动功率达到峰值”思路,在借助一元多次方程求解软件(例如:WolframAlpha软件)的情况下得出的偏心轮机构的驱动功率的求解思路及计算方法显得更为简便。文中重点对对心直动滚子从动件偏心轮机构进行运动分析、静力学分析,通过几何关系和数学运算,得出了偏心轮最大负载转矩对应转角的代数表达式,并在实例计算中应用,同时采用不同的思路计算验证。此次讨论的偏心轮机构驱动功率计算思路以及运算得出的代数表达式,应用于相应的产品设计计算中,可简化计算难度,缩短计算时间,提高设计工作效率。

## 参考文献:

- [1] 段慧文,郑辉,魏发孔,等.舞台机械工程与舞台机械设计[M].北京:中国戏剧出版社,2013.
- [2] 成大先.机械设计手册[M].6版.北京:化学工业出版社,2016.
- [3] 董冠文,李宗义.对心直动滚子从动件盘形凸轮机构精确解与近似解的比较[J].锻压装备与制造技术,2017(2):82-85.
- [4] 同济大学数学系编.高等数学[M].第六版上册.北京:高等教育出版社,2007.
- [5] NELSON W. Accelerated Testing:: Statistical Methods, Test Plans, and Data Analysis[M]. New York: John Wiley Press, 1990.
- [6] 茆诗松,王玲玲.加速寿命试验[M].北京:科学出版社,2000.
- [7] 李海波,张正平,胡彦平.加速寿命试验方法及其在航天产品中的应用[J].强度与环境,2007(1):2-10.
- [8] YANG G B. Optimum Constant-stress Accelerated Life-test Plans [J]. IEEE Transactions on Reliability, 1994, 43(4): 575-581.
- [9] GB/T 2689.1-1981.恒定应力寿命试验和加速寿命试验方法[S].
- [10] 秦玉灵,宫晓春,李晓东,等.某型硬质泡沫弹架蠕变特性及贮存寿命研究[J].装备环境工程,2022(4):22-27.
- [11] 宫晓春,秦玉灵,赵薇,等.某型金属减振器的加速贮存验证试验方法研究[J].装备环境工程,2021(4):82-87.
- [12] 滕飞,王浩伟,滕克难.面向导弹延寿的冲压发动机加速贮存试验方法[J].装备环境工程,2019(3):37-42.
- [13] 李久祥,申军,侯海梅,等.装备贮存延寿技术[M].北京:中国宇航出版社,2007.

(上接第26页)