doi:10.16576/j.ISSN.1007-4414.2024.05.029

斜齿轮的有效长度和收尾长度的计算*

陈　涛

(浙江万达汽车方向机有限公司,浙江 杭州　311258)

摘　要:文章基于理论分析并应用 Lagrange 乘数法以及求解一个一元四次方程,推导得到了与圆柱型齿条配合的斜齿轮所需要的有效长度的解析表达式,并通过 SolidWorks 软件验证了其正确性。再通过求解一元四次方程,推导得到了斜齿轮的滚齿收尾部分最远端到垂直于工件轴线且包含退刀时滚刀轴线和工件轴线的最短距离线所在平面的距离,即滚齿收尾长度的解析表达式,并通过 SolidWorks 软件验证了其正确性。这两个表达式为与斜齿轮相关的机械产品的设计提供了重要依据。

关键词:斜齿轮;滚齿;有效长度;收尾长度

中图分类号:TH132.41;O29　　文献标识码:A　　文章编号:1007-4414(2024)05-0110-04

Calculation of the Effective Length and the Run-Out Length of Helical Gears

CHEN　Tao

(*Zhejiang Wanda Steering Gear Co., Ltd, Hangzhou　311258, Zhejiang, China*)

Abstract: Based on theoretical analysis, through applying the Lagrange multiplier method and solving a quartic equation of one variable, the analytic expression of the effective length of a helical gear fitted with a cylindrical rack is derived; then the correctness is verified by the SolidWorks software. Based on theoretical analysis, and through solving a quartic equation with one variable, the analytic expression of distance between the farthest end of hobbing and the plane perpendicular to the workpiece axis and containing the shortest distance line between the hobbing axis and the workpiece axis is derived, this distance is the hobbing run-out length of a helical gear. Then the correctness is verified by SolidWorks software. These two expressions provide an important basis for design of the helical gear related mechanical products.

Key words: helical gear; hobbing; effective length; run-out length

0　引　言

在某些机械产品(如转向器)中,通常使用斜齿轮和(圆柱型)齿条配合实现旋转运动和直线运动的转换。在这些产品中,斜齿轮经常有一端没有被“滚通”,即存在着一段滚齿加工的收尾长度。在收尾长度里,若不是正常的齿形则不能参与齿条的啮合运动,因此要避开齿条,即斜齿轮的滚齿有效长度要足够长,否则会与齿条产生干涉进而影响机械产品的性能。另外,知道了斜齿轮的滚齿有效长度,还可以设计斜齿轮的齿部在原点的另一端,即将其设置在滚通的那一端的端面的合适的位置。另一方面,斜齿轮的收尾长度也影响着斜齿轮相关的机械产品的尺寸和受力等。刘法权[1]基于 BASIC 语言编程,用数值的方法计算了滚齿时刀架回转中心至滚刀顶圆柱与毛坯顶圆柱交线最低点的距离,这段距离就等于收尾长度。刘忠朝[2]给出了一些切入长度(收尾长度)的简化或近似计算式的误差比较。但是斜齿轮的滚齿收尾长度的精确解析表达式还没有文献提到过,与齿条配合的斜齿轮需要的滚齿有效长度也没有文献涉及过。基于此,笔者重点研究斜齿轮的有效长度和收尾长度的计算,推导得到了这两个解析表达式,并通过 SolidWorks 软件验证了其正确性,该计算求解对与斜齿轮相关的机械产品的设计有重要意义。

1　斜齿轮的有效长度的计算

1.1　理论分析

考虑斜齿轮的滚齿有效长度的设计。事实上,斜齿轮齿顶圆柱和齿条圆柱在空间中有一个交集。由于斜齿轮的齿面都在斜齿轮齿顶圆柱的范围内,而齿条的齿面都在齿条圆柱的范围内,所以斜齿轮和齿条的啮合就发生在该交集内。为了使斜齿轮和齿条正常啮合而不发生干涉,就必须保证斜齿轮在该交集所在的轴线长度范围内的齿形都是有效的。于是,滚齿有效长度的设计问题转换为求斜齿轮齿顶圆柱和齿条圆柱的相贯线投影到斜齿轮的轴线的长度范围,即保证此长度范围必须在设计的滚齿有效长度的范围内才能满足设计的要求。

1.2　变量符号定义

设中心距为 a、轴交角为 Σ、斜齿轮齿顶圆半径

* 收稿日期:2024-03-01

作者简介:陈　涛(1988-),男,浙江杭州人,硕士,工程师,研究方向:转向器的设计。

为 rp、齿条半径为 rr。按图 1 建立坐标系。其中，中心距 a 定义为斜齿轮轴线和齿条轴线的最短距离，轴交角 Σ 定义为从斜齿轮轴线沿最短距离线指向齿条轴线的方向看，如果斜齿轮轴线顺时针旋转一个锐角到达和齿条轴线重合的位置，则轴交角 Σ 就是这个锐角；如果斜齿轮轴线要逆时针才能旋转一个锐角到达和齿条轴线重合的位置，则轴交角 Σ 就是这个锐角的相反数。图 1 所示的轴交角 Σ 为正，滚齿有效长度和滚齿收尾长度如图 2 所示。

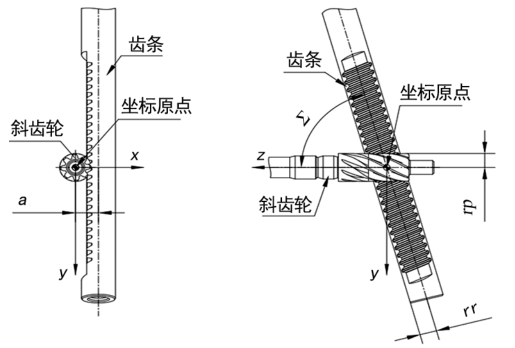

图 1　斜齿轮和齿条的相对位置和坐标系

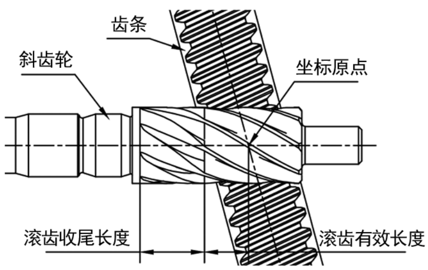

图 2　滚齿有效长度和滚齿收尾长度

1.3　推导过程

推导公式为：

$$x^2 + y^2 - rp^2 = 0 \tag{1}$$

$$(a - x)^2 + (y\cos\Sigma + z\sin\Sigma)^2 - rr^2 = 0 \tag{2}$$

用数学语言描述，就是在式(1)和式(2)的条件下求 z 的极值，其中式(1)表示点$\{x,y,z\}$在斜齿轮齿顶圆柱的表面，而式(2)表示点$\{x,y,z\}$在齿条圆柱的表面。

按文献[3]，应用 Lagrange 乘数法，令：

$$L\{x,y,z,\lambda,\mu\} = z + \lambda(x^2 + y^2 - rp^2) + \mu[(a - x)^2 + (y\cos\Sigma + z\sin\Sigma)^2 - rr^2] \tag{3}$$

对式(3)求各偏导数，令各偏导数为零，得到下列各方程：

$$0 = \frac{\partial L}{\partial x} = 2\lambda x - 2\mu(a - x) \tag{4}$$

$$0 = \frac{\partial L}{\partial y} = 2\lambda y + 2\cos\Sigma\mu(y\cos\Sigma + z\sin\Sigma) \tag{5}$$

$$0 = \frac{\partial L}{\partial z} = 1 + 2\sin\Sigma\mu(y\cos\Sigma + z\sin\Sigma) \tag{6}$$

$$0 = \frac{\partial L}{\partial \lambda} = x^2 + y^2 - rp^2 \tag{7}$$

$$0 = \frac{\partial L}{\partial \mu} = (a - x)^2 + (y\cos\Sigma + z\sin\Sigma)^2 - rr^2 \tag{8}$$

由式(5)、(6)得：

$$\lambda y\tan\Sigma = \frac{1}{2} \tag{9}$$

由式(4)、(6)得：

$$\lambda = \frac{a - x}{x} \times \mu = \frac{a - x}{x} \times \frac{-1}{2\sin\Sigma(y\cos\Sigma + z\sin\Sigma)} \tag{10}$$

由式(9)~(10)得：

$$\frac{a - x}{x} \times \frac{-1 \times y}{y\cos\Sigma + z\sin\Sigma} = \cos\Sigma \tag{11}$$

将式(11)两边平方，再由式(7)、(8)得：

$$(a - x)^2(rp^2 - x^2) = x^2[rr^2 - (a - x)^2]\cos^2\Sigma \tag{12}$$

令 $t = \cos^2\Sigma$，展开得：

$$(1 - t)x^4 - 2a(1 - t)x^3 + (a^2 - rp^2 - a^2t + rr^2t)x^2 + 2a \times rp^2x - a^2rp^2 = 0 \tag{13}$$

此一元四次方程的 4 个根分别为：

$$x_1 = \frac{1}{2}(a - \sqrt{t_4} + \sqrt{t_5 + t_6}) \tag{14}$$

$$x_2 = \frac{1}{2}(a - \sqrt{t_4} - \sqrt{t_5 + t_6}) \tag{15}$$

$$x_3 = \frac{1}{2}(a + \sqrt{t_4} + \sqrt{t_5 - t_6}) \tag{16}$$

$$x_4 = \frac{1}{2}(a + \sqrt{t_4} - \sqrt{t_5 - t_6}) \tag{17}$$

其中：

$$t_1 = a^2 - rp^2 - a^2t + rr^2t \tag{18}$$

$$t_2 = 54\, a^2rp^2rr^2(1 - t)t + t_1^{\,3} \tag{19}$$

$$t_3 = (t_2 + \sqrt{t_2^{\,2} - t_1^{\,6}})^{\frac{1}{3}} \tag{20}$$

$$t_4 = a^2 - \frac{2t_1}{3(1 - t)} + \frac{t_1^{\,2}}{3(1 - t)t_3} + \frac{t_3}{3(1 - t)} \tag{21}$$

$$t_5 = 2a^2 - \frac{4t_1}{3(1 - t)} - \frac{t_1^{\,2}}{3(1 - t)t_3} - \frac{t_3}{3(1 - t)} \tag{22}$$

$$t_6 = \frac{2a(rr^2t + rp^2)}{(1 - t)\sqrt{t_4}} \tag{23}$$

因为 t_5-t_6 是负数，所以式（16）、（17）这两个根是虚数根，没有意义要舍去，而式（15）这个根是负数所以也没有意义要舍去。所以 x 的真根是式（14）。解出了 x 的值，y 的值计算如下：

$$y=-\operatorname{sgn}\Sigma\times\sqrt{rp^2-x^2} \tag{24}$$

其中：sgnΣ 表示 Σ 的符号，若 Σ 为正，则 sgn$\Sigma=1$；若 Σ 为负，则 sgn$\Sigma=-1$。进而 z 的极值计算如下：

$$z=[\operatorname{sgn}\Sigma\times\sqrt{rr^2-(a-x)^2}-y\cos\Sigma]/\sin\Sigma \tag{25}$$

1.4　一个算例及 SolidWorks 软件验证

下面给出一个算例。如果中心距 $a=17.95$ mm、轴交角 $\Sigma=74°55'$、斜齿轮齿顶圆半径 $rp=11.175$ mm、齿条半径 $rr=13.5$ mm，则按照上述公式计算得到 z 的极值是 12.692 9 mm。另一方面也可以在一些三维建模软件（如 SolidWorks）中进行验证，先创建斜齿轮齿顶圆柱的三维模型，再按照正确的中心距和轴交角创建齿条圆柱的三维模型，并用齿条圆柱“切除”斜齿轮齿顶圆柱，得到两个圆柱的相贯线。在 SolidWorks 中测量相贯线的 z 坐标的极值，同样是 12.692 9 mm，如图 3 所示，从而验证了上述公式的正确性。

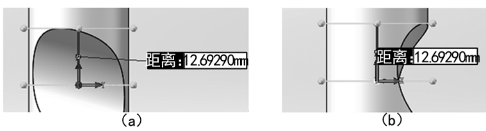

图 3　在 SolidWorks 中测量相贯线的 z 坐标的极值

1.5　此表达式的用处

得到 z 的极值后，就可以用来设计斜齿轮的滚齿有效长度，即要保证斜齿轮的滚齿有效长度大于 z 的极值；另一方面，还可以设计斜齿轮的齿部在原点的另一端，即滚通的那一端的合适的位置。

2　斜齿轮的收尾长度的计算

2.1　理论分析

现在考虑斜齿轮的滚齿收尾长度。按文献[4]，滚刀和工件实质上可以看作是两个交错轴的斜齿轮的啮合，且滚刀和工件是点接触的。滚齿加工斜齿轮时，滚刀和工件按一定的速比绕各自轴线旋转，即展成运动；另外，滚刀还沿工件轴线方向平移，工件再附加一个转动，即进给运动。展成运动过程中，在工件上形成了一条接触点轨迹，在进给运动过程中，这条接触点轨迹通过螺旋扫描得到了被加工的齿面。当进给运动结束后开始退刀，即滚刀轴线和工件轴线的中心距开始增大，同时展成运动仍然在进行。于是就在工件上留下一段收尾的不正常齿形，工件的“收尾齿根”如图 4 所示。

图 4　工件的“收尾齿根”

设滚齿中心距为 a、滚齿轴交角为 Σ、滚刀外圆半径为 r、工件轴向距离滚刀轴线和工件轴线的最短距离线为 x，x 对应工件的“收尾齿根”（见图 4）的半径，即滚刀外圆加工得到的表面和工件轴线的距离为 y。将垂直于工件轴线且距离滚刀轴线和工件轴线的最短距离线为 x 的平面称为平面 A。平面 A 和滚刀轴线的交点在平面 A 内和工件轴线的距离是 $\sqrt{a^2+(x\tan\Sigma)^2}$。因为滚刀退刀时，滚刀和工件都仍然绕其轴线旋转，所以考虑滚刀轴线按照滚齿中心距 a 和滚齿轴交角 Σ 绕工件轴线旋转得到一个旋转几何体，在过工件轴线的平面内截得的曲线是：

$$y=\sqrt{a^2+(x\tan\Sigma)^2} \tag{26}$$

再作这个曲线的距离为 r 的等距曲线，就是和正常齿形的齿根圆柱相连的“收尾齿根”的曲线。

2.2　推导过程

设式（26）所对应的曲线在 $\{x,y\}$（其中 $x>0$）的切线的倾角为 θ。则：

$$\tan\theta=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sqrt{a^2+(x\tan\Sigma)^2}=\frac{x\tan^2\Sigma}{\sqrt{a^2+(x\tan\Sigma)^2}} \tag{27}$$

设此曲线往工件轴线偏移 r 后，$\{x,y\}$ 到达 $\{x_r,y_r\}$。则：

$$\begin{aligned}x_r&=x+r\sin\theta=x+r\frac{\tan\theta}{\sqrt{1+\tan^2\theta}}\\&=x+r\frac{x\tan^2\Sigma}{\sqrt{a^2+x^2(\tan^2\Sigma+\tan^4\Sigma)}}\end{aligned} \tag{28}$$

$$\begin{aligned}y_r&=y-r\cos\theta=y-r\frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\theta}}\\&=\sqrt{a^2+(x\tan\Sigma)^2}-\\&\quad r\frac{\sqrt{a^2+(x\tan\Sigma)^2}}{\sqrt{a^2+x^2(\tan^2\Sigma+\tan^4\Sigma)}}\end{aligned} \tag{29}$$

令：

$$at=\frac{a\tan\Sigma}{\sqrt{1+\tan^2\Sigma}} \tag{30}$$

$$rt=\frac{r}{\sqrt{1+\tan^2\Sigma}} \tag{31}$$

联立式(26)、式(30)、式(31)和式(29),得到:

$$(y-y_r)^2(y^2-at^2)=rt^2y^2 \tag{32}$$

这个一元四次方程的 4 个根为:

$$y_1=\frac{1}{2}\left(y_r-\sqrt{t_4}+\sqrt{t_5+t_6}\right) \tag{33}$$

$$y_2=\frac{1}{2}\left(y_r-\sqrt{t_4}-\sqrt{t_5+t_6}\right) \tag{34}$$

$$y_3=\frac{1}{2}\left(y_r+\sqrt{t_4}+\sqrt{t_5-t_6}\right) \tag{35}$$

$$y_4=\frac{1}{2}\left(y_r+\sqrt{t_4}-\sqrt{t_5-t_6}\right) \tag{36}$$

其中:

$$t_1=-at^2-rt^2+y_r^2 \tag{37}$$

$$t_2=-54\,at^2rt^2y_r^2+t_1{}^3 \tag{38}$$

$$t_3=\left(t_2+\sqrt{t_2{}^2-t_1{}^6}\right)^{\frac{1}{3}} \tag{39}$$

$$t_4=at^2+rt^2+\frac{t_1}{3}+\frac{t_1{}^2}{3t_3}+\frac{t_3}{3} \tag{40}$$

$$t_5=at^2+rt^2+y_r^2-\frac{t_1}{3}-\frac{t_1{}^2}{3t_3}-\frac{t_3}{3} \tag{41}$$

$$t_6=\frac{2y_r(at^2-rt^2)}{\sqrt{t_4}} \tag{42}$$

因为 t_5-t_6 是负数,所以式(35)、(36)这两个根是虚数根,没有意义要舍去,而式(34)这个根是负数,所以也没有意义要舍去。所以 y 的真根是式(33)。解出了 y 的值,根据式(26)~(29),得到 x_r 的表达式如下:

$$x_r=x+r\sin\theta=x+r\cos\theta\tan\theta=x+(y-y_r)\times\frac{x\tan^2\Sigma}{\sqrt{a^2+(x\tan\Sigma)^2}}=x+x\left(1-\frac{y_r}{y}\right)\tan^2\Sigma \tag{43}$$

2.3　一个算例及 SolidWorks 软件验证

下面给出一个算例。如果滚齿中心距 $a=31.839\,994$ mm、滚齿轴交角 $\Sigma=-120°$、工件齿顶圆半径 $y_r=11.175$ mm、滚刀外圆半径 $r=25$ mm,则按照上述公式计算得到 $x_r=17.272\,64$ mm。

然后可以在一些三维建模软件(如 SolidWorks)中进行验证,先创建斜齿轮齿顶圆柱的三维模型,再按照正确的滚齿中心距和滚齿轴交角创建滚刀外圆柱的三维模型,用滚刀外圆柱“切除”斜齿轮齿顶圆柱,得到两个圆柱的相贯线。在软件中测量相贯线的 z 坐标的极值如图 5 所示,同样是 17.272 64 mm,从而验证了上述公式的正确性。

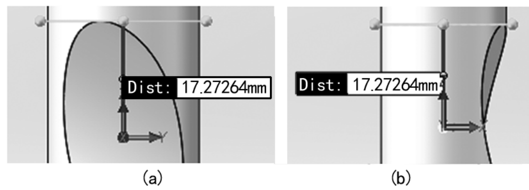

图 5　在 SolidWorks 中测量相贯线的 z 坐标的极值

3　结　语

文章通过理论分析和数学方法推导得到了与圆柱型齿条配合的斜齿轮所需要的有效长度的解析表达式,以及滚齿收尾部分最远端到垂直于工件轴线且包含退刀时滚刀轴线和工件轴线的最短距离线所在平面的距离,即滚齿收尾长度的解析表达式。并通过 SolidWorks 软件验证了其正确性。这两个表达式为与斜齿轮相关的机械产品的设计提供了重要依据。

参考文献:

[1]　刘法权.滚齿切入长度的计算[J].机械工程师,1990(5):14-15+6.

[2]　刘忠朝.滚齿切入长度简化计算式与近似计算式的误差比较[J]. 机械工程师,1992(3):45.

[3]　同济大学数学系.高等数学(下册)[M].6 版.北京:高等教育出版社,2007.

[4]　齿轮手册编委会.齿轮手册(下册)[M].2 版.北京:机械工业出版社,2000.